I. S. F. A.

2007-2008

Concours d'Entrée

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

OPTION B

Loi double exponentielle et modèle de Kou en finance.

Ce sujet aborde de manière très simplifiée des questions de probabilités inspirées de problèmes rencontrés en finance. Néanmoins, aucune connaissance préalable en actuariat n'est nécessaire. Rappelons que d'une façon générale, une condition sur des paramètres a, b et c pour qu'une certaine propriété soit vérifiée peut éventuellement ne faire intervenir qu'un sous-ensemble strict de $\{a, b, c\}$.

1 Loi double-exponentielle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On utilisera les notations $E(X)$ et $Var(X)$ respectivement pour l'espérance et la variance d'une variable aléatoire. Pour $A \subset \mathbb{R}$, 1_A désigne la fonction indicatrice de A, définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ sinon. Pour $p \in [0, 1]$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ paramètres fixés, soit $f_{p,\lambda,\mu}$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_{p,\lambda,\mu}(x) = (1-p)\lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x) + p\mu e^{\mu x} 1_{]-\infty,0[}(x).$$

1. Vérifier que pour tous $p \in [0, 1]$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, $f_{p,\lambda,\mu}$ est une densité de probabilité.
2. On suppose que X admet pour densité $f_{p,\lambda,\mu}$. On dira alors que X suit la loi double exponentielle de paramètres (p, λ, μ). Calculer $E(X)$.
3. Calculer $Var(X)$.
4. Déterminer la fonction de répartition de X.
5. Déterminer l'inverse de la fonction de répartition de X.
6. Décrire une méthode de simulation de réalisations de la variable aléatoire X.
7. A quelle condition sur p, λ et μ a-t-on pour tout $x \geq 0$, $P(X > x) = P(X < -x)$? Dans ce cas la loi de X est appelée première loi des erreurs de Laplace.
8. Lorsque X suit la première loi des erreurs de Laplace, déterminer la loi de $Y = |X|$.

9. Lorsque X suit la première loi des erreurs de Laplace, montrer que $Y = |X|$ vérifie la propriété de perte de mémoire : montrer que pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $t > s$,

$$P\left(Y > t \mid Y > s\right) = P\left(Y > t - s\right).$$

10. Dans le cas général, si l'on suppose $\lambda \neq \mu$, pour quelle(s) valeur(s) de p la propriété de perte de mémoire est-elle vérifiée par $|X|$? Quelle est la loi de $|X|$ dans ce(s) cas ?
11. Dans les questions 11, 12 et 13, on considère une variable aléatoire X suivant la loi double exponentielle de paramètres $p = 1/2$, $\lambda = \mu = 1$. Soit f_X sa fonction de densité et F_X sa fonction de répartition. Pour $n \geq 1$, on considère la fonction H_n définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\left[1 + te^{-n|t|}\right] dt.$$

Montrer que pour $n \geq 1$, H_n est bien une fonction de répartition.

12. Pour $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de fonction de répartition H_n. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|H_n(x) - F_X(x)| \leq \frac{C}{n} F_X(x),$$

où C est une constante à préciser.

13. En déduire que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi. Préciser la distribution limite.
14. Revenons au cas général ($p \in [0, 1]$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$). X vérifie-t-il la propriété de perte de mémoire : a-t-on en général pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour tout $t > s$, $P(X > t|X > s) = P(X > t - s)$?
15. Déterminer le plus petit x_0 tel que pour tous $p \in [0, 1]$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, $\forall t > s \geq x_0$,

$$P(X > t|X > s) = P(X > t - s).$$

Cette propriété partielle de perte de mémoire est très utile dans le modèle financier dit modèle de Kou.

16. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi double exponentielle de paramètres

$p \in [0,1]$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Pour $n \geq 1$, soit I_n la variable aléatoire définie pour $\omega \in \omega$ par

$$\begin{cases} I_n(\omega) = 1 & \text{si } Y_n(\omega) > 0 \\ I_n(\omega) = 0 & \text{si } Y_n(\omega) \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que $(I_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

17. Montrer que les variables aléatoires I_n, $n \geq 1$ sont identiquement distribuées et suivent une loi de Bernouilli de paramètre q à préciser.
18. Pour $n \geq 1$, soit Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = I_n Y_n$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
19. Déterminer la fonction de répartition de Z_1 et tracer son graphe.
20. Pour $n \geq 1$, soit
$$S_n = \sum_{j=1}^{n} I_j.$$
Déterminer la loi de S_n.
21. Pour $n \geq 1$, soit
$$V_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j.$$
Pour $n \geq 1$, les variables aléatoires S_n et V_n sont-elles indépendantes ?
22. Déterminer $E(V_n)$ pour $n \geq 1$.
23. Soit $(W_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre $\nu > 0$. Montrer par récurrence sur n que
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$$
suit une loi Gamma de paramètres (ν, n) dont la densité f_{A_n} est donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par
$$f_{A_n}(x) = \frac{e^{-\nu x}\nu^n x^{n-1}}{(n-1)!} 1_{[0,+\infty[}(x).$$

24. En déduire que pour $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$ et $x \geq 0$,

$$P\left(V_n \leq x \mid S_n = k\right) = \int_0^x \frac{e^{-\nu t} \nu^k t^{k-1}}{(k-1)!} dt.$$

25. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour $n \geq 1$, la fonction de répartition F_{V_n} de V_n est donnée par

$$\begin{cases} F_{V_n}(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0, \\ F_{V_n}(0) = \alpha_{n,0}, \\ F_{V_n}(x) = \alpha_{n,0} + \int_0^x e^{-\nu t} \left[\sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \frac{\nu^k t^{k-1}}{(k-1)!}\right] dt \quad \text{pour } x > 0, \end{cases}$$

où les $\alpha_{n,k}$, $0 \leq k \leq n$ sont des coefficients à préciser.

2 Value-at-Risk, modèle de Black et Scholes et modèle de Kou

En assurance et en finance, on utilise souvent la Value-at-Risk pour quantifier un risque. Cette Value-at-Risk est en fait un simple quantile. Dans toute cette partie, pour une variable aléatoire V, on notera F_V sa fonction de répartition et F_V^{-1} l'inverse (généralisé) de sa fonction de répartition. Le modèle de Black et Scholes est le modèle d'évaluation des options le plus connu en finance. Dans ce modèle, le quotient du prix d'une action à la date finale divisé par le prix initial suit une loi log-normale. Afin de mieux prendre en compte les phénomènes observés sur le marché, Steve Kou a proposé d'incorporer dans le processus d'évolution des prix des sauts d'amplitude aléatoire décrite par la loi double exponentielle. Cette partie n'a pas du tout la prétention d'aborder ces problèmes mais est constituée de questions en lien avec ces modèles. Les premières questions de cette partie portent sur des propriétés basiques de la Value-at-Risk et des lois normales. Les suivantes portent sur des calculs intervenants dans la formule de Black et Scholes. La dernière question porte sur une condition que doivent vérifier les paramètres du modèle de Kou.
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X définie par

$$F_X(x) = \Phi(cx + d),$$

où $c \neq 0$, $d \in \mathbb{R}$ sont des réels fixés et Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de X, ainsi que sa moyenne et sa variance.
2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On suppose à partir de maintenant que β est tel que le quantile $F_Y^{-1}(\beta) = 3$. Déterminer alors $F_X^{-1}(\beta)$.
3. En supposant de plus que X et Y sont indépendants, calculer $F_{X+Y}^{-1}(\beta)$.
4. D'après la formule de Black et Scholes, le prix C d'une option d'achat au prix K à la date future $T > 0$, lorsque le prix actuel de l'action sous-jacente est S_0, peut être exprimé (après un changement de probabilité que nous n'expliquons pas ici) comme suit :

$$C = S_0 P\left(S_0 e^{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma Z_1} > K\right) - Ke^{-rT} P\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma Z_2} > K\right),$$

   où $\sigma > 0$ est un paramètre fixé appelé volatilité, $r > 0$ est un autre paramètre fixé correspondant au taux d'intérêt sans risque et où Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires suivant une loi normale de moyenne 0 et de variance T. Réécrire la formule de Black et Scholes sous la forme

$$C = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

   où d_1 et d_2 sont deux réels à préciser et à exprimer en fonction de S_0, K, r, σ et T.
5. Exprimer $1 - \Phi(-d_1)$ en fonction de $\Phi(d_1)$.
6. Dans le modèle de Kou, dans lequel on incorpore des sauts, le prix de l'actif à la date t est multiplié par e^X en cas de saut, où X est une variable aléatoire suivant la loi double exponentielle de paramètres $p \in [0,1]$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, dont la densité $f_{p,\lambda,\mu}$ est, rappelons-le, la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_{p,\lambda,\mu}(x) = (1-p)\lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x) + p\mu e^{\mu x} 1_{[-\infty,0[}(x).$$

   Déterminer la condition de non-explosion vers l'infini du prix de l'actif : à quelle condition sur p, λ et μ a-t-on $E\left[e^X\right] < +\infty$?